



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

094

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۴/۵

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراحان سؤال	ویراستاران
مهرداد کیوان	سید جواد نظری
حسین شفیع زاده	ارسلان حسنونند

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱- در یک کلاس ۳۵ نفری، ۲۷ نفر به فوتبال و ۲۱ نفر به والیبال علاقه‌مند هستند. اگر ۶ نفر به هیچ یک از دو ورزش علاقه‌ای نداشته باشند، چند نفر فقط به والیبال علاقه‌مند هستند؟

۹ (۴)

۲ (۳)

۱۲ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

می‌دانیم $n(A \cup B) = 29$ چون ۶ نفر به هیچ رشته ورزشی علاقه ندارند، پس به این ترتیب:

$$29 = 27 + 21 - n(A \cap B) \\ \Rightarrow n(A \cap B) = 48 - 29 = 19$$

یعنی ۱۹ نفر به هر دو رشته علاقه‌مند هستند. و تعداد کسانی که فقط به والیبال علاقه‌مند هستند $21 - 19 = 2$ است.

۲- با فرض $a = 1 + \sqrt[3]{2}$ ، حاصل $a^3 - \frac{9}{a}$ چند برابر $\sqrt[3]{2}$ است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا a^3 و $\frac{9}{a}$ جداگانه محاسبه می‌شوند:

$$a^3 = (1 + \sqrt[3]{2})^3 = 1 + 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} + 2$$

$$\frac{9}{a} = \frac{9}{\sqrt[3]{2} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1} \Rightarrow \frac{9}{a} = 3\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} + 3$$

$$\Rightarrow a^3 - \frac{9}{a} = (3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} + 3) - (3\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} + 3) = 6\sqrt[3]{2} \Rightarrow \frac{a^3 - \frac{9}{a}}{\sqrt[3]{2}} = 6$$

۳- در دنباله‌ای از اعداد که $a_1 = -1$ و برای هر $n \geq 1$ رابطه $a_{n+2} = a_n + 3$ برقرار باشد. جمله بیست و نهم دنباله چه عددی است؟

۴۷ (۴)

۴۴ (۳)

۴۱ (۲)

۳۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به رابطه $a_{n+2} = a_n + 3$ جملات a_1 و a_3 و a_5 و... تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت ۳ می‌دهند. جمله بیست و نهم در واقع پانزدهمین جمله با شماره فرد است. به عبارتی:

$$a_{29} = a_1 + 14d = -1 + 14 \times 3 = 41$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



در واقع:

$$\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots \end{matrix} \Rightarrow a_{29} = b_{15}$$

۴- اگر مقادیر $2x+3, 2x+1, x+1$ سه ضلع یک مثلث قائم الزاویه باشند، مساحت مثلث چه عددی است؟

۶۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۶۸ (۲)

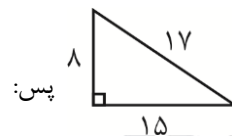
۳۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مطابق قضیه فیثاغورس داریم:

$$\begin{aligned} (2x+3)^2 &= (x+1)^2 + (2x+1)^2 \\ 4x^2 + 9 + 12x &= x^2 + 2x + 1 + 4x^2 + 4x + 1 \\ \Rightarrow x^2 - 6x - 7 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 15 \times 8 = 60$$



پس اضلاع مثلث ۸ و ۱۵ و ۱۷ هستند،

پس:

۵- به ۱۹۲ روش می توان از بین n زوج، $n-1$ نفر انتخاب کرد به طوریکه از هر زوج حداکثر یک نفر انتخاب شده باشد. عدد طبیعی n کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

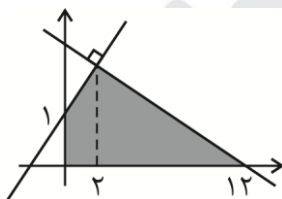
۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

در ابتدا از بین n زوج $n-1$ دسته را انتخاب می کنیم در هر دسته ۲ حالت داریم، یعنی:

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-1} \times 2^{n-1} &= 192 \\ \Rightarrow n \times 2^{n-1} &= 192 \Rightarrow n \times 2^{n-1} = 32 \times 6 \Rightarrow n = 6 \end{aligned}$$



۶- در شکل مقابل، مساحت ناحیه رنگی چه عددی است؟

۳۰ (۲)

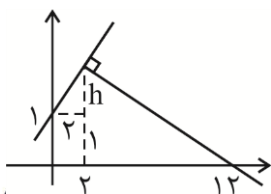
۳۱ (۱)

۲۶ (۴)

۲۷ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

دو خط داده شده بر هم عمود هستند، پس حاصل ضرب شیب آنها -۱ است.



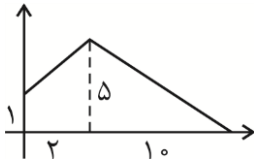
هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



شیب دو خط رسم شده $\frac{h}{2}$ و $\frac{-(h+1)}{10}$ می باشد، پس $\frac{-(h+1)}{10} \times \frac{h}{2} = -1$

$$\Rightarrow h(h+1) = 20 \Rightarrow h = 4$$

برای یافتن مساحت ناحیه مورد نظر آن را به یک مثلث قائم الزاویه و یک دوزنقه تبدیل می کنیم:



$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 + \frac{5+1}{2} \times 2 = 25 + 6 = 31$$

۷- اگر $f(x) = [x]$ باشد، برد تابع $y = f(x + f(-x))$ کدام است؟

{0, 1, -1} (۴)

{0} (۳)

{0, 1} (۲)

{0, -1} (۱)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا ضابطه تابع را به دست می آوریم.

$$y = [x + [-x]] = [x] + [-x]$$

اما می دانیم $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ پس برد تابع $\{0, -1\}$ است.

۸- ساده شده عبارت $A = \left(\sin 15^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ} \right) \left(\cos 15^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ} \right)$ برابر کدام گزینه است؟

$\frac{9}{4}$ (۴)

$\frac{9}{64}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر α و β متمم باشند:

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\cos \beta = \sin \alpha$$

$$15^\circ + 75^\circ = 90^\circ \text{ پس } \sin 75^\circ = \cos 15^\circ, \cos 75^\circ = \sin 15^\circ$$

$$A = \left(\sin 15^\circ - \frac{1}{\cos 15^\circ} \right) \left(\cos 15^\circ - \frac{1}{\sin 15^\circ} \right)$$

$$A = \frac{(\cos 15^\circ \sin 15^\circ - 1)^2}{\cos 15^\circ \sin 15^\circ} = \frac{\left(\frac{1}{2} \sin 30^\circ - 1 \right)^2}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$$

$$A = \frac{\left(\frac{-3}{4} \right)^2}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{9}{4}$$

$$\text{دقت کنید } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۹- هرگاه α, β ریشه‌های $x^2 - 6x + 2 = 0$ و $\alpha + 1, \beta + 1$ ریشه‌های معادله $x(x-8) = m$ باشند، مقدار m کدام است؟

۳ (۴)

-۳ (۳)

۹ (۲)

-۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

با کمی دقت مشخص است، ریشه‌های $x^2 - 8x - m = 0$ یک واحد از ریشه‌های $x^2 - 6x + 2 = 0$ بیشتر هستند.

اگر فرض کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های $x^2 - 6x + 2 = 0$ هستند، آنگاه:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$$

آنگاه ریشه‌های $x^2 - 8x - m = 0$ اعداد $x_1 + 1$ و $x_2 + 1$ هستند، پس:

$$\begin{cases} (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = 8 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) = -m \end{cases}$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = -m \Rightarrow 2 + 6 + 1 = -m \Rightarrow m = -9$$

۱۰- فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله آن از نقاط A و B به ترتیب ۵ و ۸ است، طول پاره خط AB کدام است؟

۵ فقط (۴)

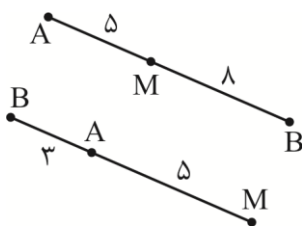
۱۳ یا ۳ (۳)

۹ یا ۵ (۲)

۳ فقط (۱)

پاسخ: گزینه ۳

فرض می‌کنیم آن نقطه M باشد، چون M یکتاست، پس M, A, B هر سه روی یک خط راست واقع‌اند، پس:



(۱) بین A و B است، در این حالت $AB = 13$.

(۲) در امتداد A و B است، در این حالت $AB = 3$.

پس AB یا ۳ است یا ۱۳.

۱۱- وسط اضلاع یک دوزنقه متساوی‌الساقین که اندازه قاعده‌های آن ۷ و ۹ است را به هم وصل کرده‌ایم، یک چهار ضلعی با

محیط ۲۰ به دست آمده است، مساحت دوزنقه چه عددی است؟

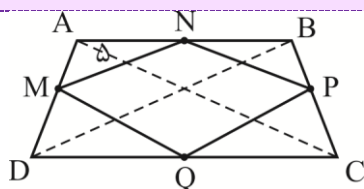
۴۸ (۴)

۶۴ (۳)

۴۰ (۲)

$40\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



در مثلث ABD ، چون M و N وسط دو ضلع مثلث است، پس اندازه MN نصف BD است و چون $DB = AC$:

$$MN = PQ = \frac{1}{2} DB$$

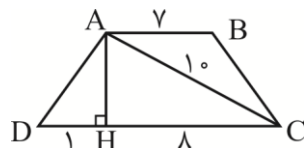
$\Rightarrow$ چهار ضلعی پدید آمده لوزی با ضلع ۵ است.

$$NP = MQ = \frac{1}{2} AC$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



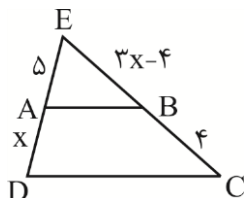
به این ترتیب:



$$AC = BD = 10$$

$$\Rightarrow AH = 6 \Rightarrow \text{مساحت دوزنقه} S = \frac{9+7}{2} \times 6 = 48$$

۱۲- در شکل روبه‌رو، مساحت دوزنقه ABCD چند برابر مساحت مثلث EAB است؟



$$\frac{16}{9} (2)$$

$$\frac{25}{16} (4)$$

$$\frac{25}{9} (1)$$

$$\frac{9}{4} (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به آن که AB موازی DC است، پس:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3x-4}{4} \Rightarrow 3x^2 - 4x - 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}$$

از طرفی دو مثلث EAB و EDC متشابه هستند به‌طوری‌که $\frac{EC}{EB} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ نسبت تشابه، پس نسبت مساحت‌ها $\frac{25}{9}$ است. مساحت دوزنقه را S_1 و مساحت مثلث EAB را S_2 فرض کنیم، آنگاه:

$$\frac{S_{EDC}}{S_{EAB}} = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}$$

۱۳- میانگین و انحراف معیار اعداد a, b, c, d به ترتیب ۱, ۳ است. واریانس داده‌های ۳, ۳, ۳, ۳, a, b, c, d چه عددی است؟

$$\frac{1}{2} (4)$$

$$\frac{1}{4} (3)$$

$$\frac{1}{8} (2)$$

$$1 (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا با توجه به فرض داده شده داریم:

$$\frac{a+b+c+d}{4} = 3 \Rightarrow a+b+c+d = 12$$

$$\frac{(a-3)^2 + (b-3)^2 + (c-3)^2 + (d-3)^2}{4} = 1$$

حال برای ۸ داده جدید داریم:

$$\bar{x} = \frac{a+b+c+d+12}{8} = 3$$

$$\text{واریانس} = \frac{(a-3)^2 + (b-3)^2 + (c-3)^2 + (d-3)^2 + 4 \times 0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۴- هرگاه $x > \frac{1}{3}$ و $f(x) = -x^2 + x + 12$ به طوریکه $g(x) = \frac{2-3x}{x+2}$ ، حاصل $f^{-1} \circ g^{-1}(-2)$ چه عددی است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته: f و g توابع وارون پذیر باشند، در این صورت: $(f^{-1} \circ g^{-1})(\alpha) = (g \circ f)^{-1}(\alpha)$

فرض می کنیم $(f^{-1} \circ g^{-1})(-2) = \alpha$ ، پس:

$$(g \circ f)^{-1}(-2) = \alpha \Rightarrow (g \circ f)(\alpha) = -2 \Rightarrow g(f(\alpha)) = -2$$

حال معادله $g(x) = -2$ را حل می کنیم:

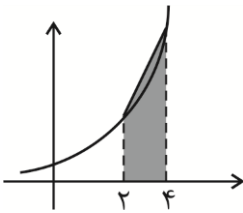
$$\frac{2-3x}{x+2} = -2 \Rightarrow 2-3x = -2x-4 \Rightarrow x = 6$$

یعنی $f(\alpha) = 6$ پس باید معادله $f(x) = 6$ را حل کنیم:

$$-x^2 + x + 12 = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3$$

۱۵- نمودار $f(x) = a^x$ به شکل زیر است. اگر مساحت دوزنقه رنگی ۲۰ باشد، مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۴ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: مساحت دوزنقه برابر است با:

$$\frac{\text{قاعده بزرگ} + \text{قاعده کوچک}}{2} \times h$$

$$S = \frac{a^4 + a^2}{2} \times 2 \text{ در این صورت } S = \frac{f(4) + f(2)}{2} \times 2, \text{ پس } f(x) = a^x$$

$$S = a^2(a^2 + 1) = 20 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x \Rightarrow f^{-1}(4) = \log_2 4 = 2$$

۱۶- اگر $x = \sqrt{2}$ یک جواب معادله $8 \log_x^x + m \log_x^2 = 6$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

 $\sqrt{2}$ (۴)

۲ (۳)

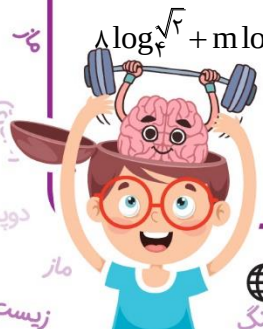
 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

چون $x = \sqrt{2}$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می کند:

$$8 \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + m \log_{\sqrt{2}}^2 = 6$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



اما با توجه به نکته $\log_b^{a^m} = \frac{m}{n} \log_b^a$ داریم:

$$8 \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + m \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow 8 \times \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 2m \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow 2m + 2 = 6 \Rightarrow m = 2$$

$$\Rightarrow 8 \log_{\frac{1}{2}}^x + 2 \log_{\frac{1}{2}}^x = 6 \Rightarrow 4 \log_{\frac{1}{2}}^x + 2 \log_{\frac{1}{2}}^x = 6$$

اگر $\log_{\frac{1}{2}}^x = A$ آنگاه:

$$2A + \frac{1}{A} = 3 \Rightarrow 2A^2 - 3A + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 & x = 2 \\ A = \frac{1}{2} & x = \sqrt{2} \end{cases}$$

۱۷- با فرض $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+a}}{x\sqrt{2x-4}} = ab$ ، عدد حقیقی b کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

برای آن که حد موجود باشد، با توجه به آن که مخرج کسر صفر می‌شود، لازم است، صورت کسر هم به ازای $x = 2$ صفر شود.

$$2 - \sqrt{a+2} = 0 \Rightarrow a = 2$$

هوپیتال برای رفع ابهام روشی مناسب است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-4}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\frac{3}{2} \times \sqrt{2x-4}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{3}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab = \frac{1}{4} \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{8}$$

۱۸- تابع $f(x) = [2\sqrt{2x}]$ در بازه $[2, 2+\alpha]$ پیوسته است، بیشترین مقدار α چه عددی است؟

$\frac{17}{4}$ (۴)

$\frac{9}{8}$ (۳)

$\frac{25}{4}$ (۲)

$\frac{25}{8}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

اگر فرض کنیم $g(x) = 2\sqrt{2x}$ ، آنگاه $g(2) = 4$ ، یعنی اگر $g(x) = 5$ ، آنگاه اولین نقطه ناپیوستگی برای f ایجاد می‌شود.

$$2\sqrt{2x} = 5 \Rightarrow \sqrt{2x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x = \frac{25}{4} \Rightarrow x = \frac{25}{8}$$

پس $\frac{25}{8}$ طول اولین نقطه ناپیوستگی f بعد از $x = 2$ است، پس:

$$2 + \alpha = \frac{25}{8} \Rightarrow \alpha = \frac{25}{8} - 2 = \frac{9}{8}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۹- اگر $f(x) = x^2 - 2x - 4$ باشد، مختصات رأس سهمی $y = -3 + f(2-x)$ کدام است؟

$S(-1, 8)$ (۴)

$S(3, 6)$ (۳)

$S(-1, 6)$ (۲)

$S(1, -8)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

روش اول:

ابتدا رأس سهمی $f(x) = x^2 - 2x - 4$ را مشخص می‌کنیم:

$$f(x) = (x-1)^2 - 5 \Rightarrow S \Big|_{-5}^1 \text{ رأس سهمی}$$

حال باید رأس سهمی $y = -3 + f(2-x)$ را مشخص کنیم:

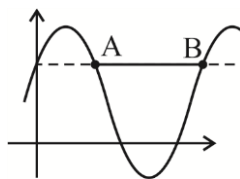
$$2-x=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-3-5=-8 \Rightarrow S' \Big|_{-8}^1 \text{ رأس سهمی جدید}$$

روش دوم: بدون هیچ ویژگی ابتدا ضابطه $y = -3 + f(2-x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = -3 + (2-x)^2 - 2(2-x) - 4$$

$$y = -3 + x^2 - 4x + 4 - 4 + 2x - 4 = x^2 - 2x - 7 \Rightarrow S \Big|_{-7}^1 \text{ رأس سهمی جدید}$$

۲۰- قسمتی از نمودار $f(x) = 2 \cos\left(bx - \frac{\pi}{3}\right)$ شکل روبه‌رو است. هرگاه $AB = \frac{\pi}{4}$ ، مقدار b کدام است؟



- (۱) $\frac{4}{3}$
- (۲) $\frac{8}{3}$
- (۳) $\frac{8}{9}$
- (۴) $\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینه ۲

در ابتدا داریم $f(0) = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1$ ، پس پاره‌خط افقی AB ، قسمتی از خط $y = 1$ است.

حال، برای رسیدن به طول نقاط A و B ، معادله نمودار را با خط $y = 1$ قطع می‌دهیم:

$$2 \cos\left(bx - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(bx - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} bx - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow bx = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ bx - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow bx = 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k=0 &\Rightarrow x_A = \frac{2\pi}{3b} \\ k=1 &\Rightarrow x_B = \frac{2\pi}{b} \\ \Rightarrow AB &= \frac{2\pi}{b} - \frac{2\pi}{3b} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{4\pi}{3b} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۲۱- مجموع جواب‌های معادله $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = 1$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

2π (۴)

$\frac{3\pi}{2}$ (۳)

π (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

در ابتدا به کمک اتحاد $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ یا $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos x - \sin x = 1 \Rightarrow (\cos x - \sin x)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

هیچ کدام از جواب‌ها ریشه مخرج نیست، پس همگی قابل قبول هستند.

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq \pi \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \quad S = \frac{3\pi}{2}$$

۲۲- اگر $f(x) = \frac{|x|-1}{x+[-x]}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ (۴)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ (۳)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ (۲)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

حدود یک طرفه f را در همسایگی $x = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|-1}{x+[-x]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|-1}{x+[-x]} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-1}{x+0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-1}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

۲۳- هرگاه $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}}$ باشد، مقدار $(f \circ f)'(1)$ چه عددی است؟

$\frac{9}{16}$ (۴)

$\frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{1}{16}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

اگر در ابتدا ضابطه f را تغییر دهیم، محاسبه مشتق راحت‌تر خواهد شد.

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{(2x+1)(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x})}{2x+1} = \sqrt{3x+1} - \sqrt{x}$$

حال f' را به دست می‌آوریم.

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



اما از طرفی:

$$(f \circ f)'(1) = f'(1) \cdot \underbrace{f'(f(1))}_{1} \Rightarrow (f \circ f)'(1) = f'(1) \cdot f'(1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

۲۴- با فرض $f(x) = g(x^2)$, $g'(x) = \frac{2x}{x+1}$, مقدار $f''(\sqrt{2})$ چه عددی است؟

$$-\frac{8}{3} (4)$$

$$\frac{40}{3} (3)$$

$$\frac{40}{9} (2)$$

$$-\frac{8}{9} (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

به کمک مشتق تابع مرکب داریم:

$$f(x) = g(x^2) \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot g'(x^2)$$

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{2x^2}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3}{x^2+1}$$

اکنون می‌توانیم به کمک قضایای مشتق، f'' را به دست آوریم.

$$f''(x) = \frac{12x^2(x^2+1) - 4x(4x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^4 + 12x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(\sqrt{2}) = \frac{4 \times 4 + 12 \times 2}{3^2} = \frac{40}{9}$$

۲۵- هرگاه نقطه $A(1, 2)$ اکستریم نسبی $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ باشد، b و نوع اکستریم نسبی تابع در این نقطه کدام است؟

$$\min, b = 2 (4)$$

$$\min, b = 1 (3)$$

$$\max, b = 1 (2)$$

$$\max, b = 2 (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به آن که f در نقطه A مشتق پذیر است، پس:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

به همین جهت داریم:

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a = b$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a = b = 1$$

با قرار دادن a, b در ضابطه تابع داریم:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	-1	0	1
f'	+	-	+
f	↙	↘	↗
	max نسبی		min نسبی

بنابراین، نقطه A ، $\min$ نسبی f است و $b = 1$ می‌باشد.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۲۶- در یک استوانه، مجموع ارتفاع و شعاع قاعده برابر ۳ است. حداکثر حجم استوانه چه عددی است؟

12π (۴)

8π (۳)

3π (۲)

4π (۱)

پاسخ: گزینه ۱

اگر r شعاع قاعده و h ارتفاع باشد:

$h + r = 3$

$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (3 - r) = \pi (3r^2 - r^3)$, $0 \leq r \leq 3$

برای آن که $\max$ مقدار حجم را به دست آوریم، از نقاط بحرانی کمک می گیریم:

$V' = 0 \Rightarrow 6r - 3r^2 = 0 \Rightarrow 3r^2 = 6r \Rightarrow r = 2$

$V_{\max} = \pi(12 - 8) = 4\pi$

یعنی در حالتی که $r = 2$ است، حجم با مقدار $V = 4\pi$ بیشترین است.

۲۷- هرگاه $A(2, 1)$ نقطه‌ای داخل دایره $x^2 + y^2 + ax - 2y = 0$ و $B(5, 2)$ نقطه‌ای خارج همان دایره باشد، حدود a کدام است؟

$a > \frac{3}{2}$ (۴)

$a < -5$ (۳)

$-5 < a < -\frac{3}{2}$ (۲)

$-\frac{3}{2} < a < 5$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: در دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، اگر فرض کنیم $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$ آنگاه:

$f(x, y) < 0 \Rightarrow$ نقطه داخل دایره است.

$f(x, y) > 0 \Rightarrow$ نقطه خارج دایره است.

$f(x, y) = 0 \Rightarrow$ نقطه روی دایره است.

$f(x, y) = x^2 + y^2 + ax - 2y$

$f(2, 1) < 0 \Rightarrow 5 + 2a - 2 < 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{2}$

$f(5, 2) > 0 \Rightarrow 29 + 5a - 4 > 0 \Rightarrow a > -5$

بنابراین، $-5 < a < -\frac{3}{2}$ است.

۲۸- در یک بیضی، مختصات کانون‌ها $(1, 1)$ و $(1, 9)$ است. هرگاه خروج از مرکز بیضی $\frac{8}{9}$ باشد، مختصات یک سر قطر کوچک بیضی کدام است؟

$(-3, 5)$ (۴)

$(-2, 5)$ (۳)

$(3, 5)$ (۲)

$(2, 5)$ (۱)

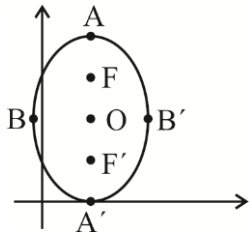
پاسخ: گزینه ۳

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



اگر بیضی را رسم شده فرض کنیم، آنگاه $2c = 8$ ، یعنی $c = 4$.

با توجه به آن که $e = \frac{c}{a}$ ، پس $a = 5$ است، لذا $b = 3$ زیرا در بیضی $a^2 = b^2 + c^2$ و $e = \frac{c}{a}$.



دو سر قطر بزرگ $A \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix}$ ، $A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

دو سر قطر کوچک $B \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}$ ، $B' \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix}$

۲۹- هرگاه A, B دو پیشامد مستقل از هم باشند و $P(A-B) = P(A \cap B)$ ، مقدار $P(A \cup B) - P(A \cap B)$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} (۴)$$

$$\frac{3}{4} (۳)$$

$$\frac{2}{3} (۲)$$

$$\frac{1}{2} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A - B) = P(A) \cdot P(B')$$

و نیز طبق گفته سوال $P(A - B) = P(A \cap B)$ ، پس:

$$P(A - B) = P(A \cap B) \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A)P(B')$$

پس:

$$\Rightarrow P(B) = P(B') \Rightarrow P(B) = 1 - P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A)P(B)$$

$$= P(A) + \frac{1}{2} - P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{چون } P(B) = \frac{1}{2} \text{ پس:}$$

۳۰- جعبه‌ای شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره سبز است. با چشم بسته مهره‌ای به تصادف از جعبه کنار می‌گذاریم.

سپس دو مهره همزمان از جعبه خارج می‌کنیم، با کدام احتمال دو مهره خارج شده هم‌رنگ هستند؟

$$\frac{13}{54} (۴)$$

$$\frac{5}{54} (۳)$$

$$\frac{1}{4} (۲)$$

$$\frac{5}{18} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

چون در ابتدا مهره خارج شده را مشاهده نکرده‌ایم، مانند آن است که هیچ مهره‌ای از جعبه خارج نشده است، پس می‌توانیم این گونه برداشت کنیم که از جعبه دو مهره خارج می‌کنیم و به کدام احتمال هم‌رنگ هستند.

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6 + 3 + 1}{36} = \frac{5}{18}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

